

Ad-Soyad:

13.06.2022

Numara:

SOYUT MATEMATİK II FİNAL SINAVI SORULARI

- 1) Rasyonel sayılar kümesi, kesim ve reel sayılar kümesi tanımlarını yapınız.
- 2) a) a, b, c, d tam sayıları için $\left. \begin{array}{l} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{array} \right\} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$ olduğunu gösteriniz.
b) x, y, z tam sayıları için $x \equiv y \pmod{m} \wedge z|m \Rightarrow x \equiv y \pmod{z}$ olur mu? Gösteriniz.
- 3) a) Tam sayılarda $3x - 11 = 7$ denkleminin çözümünün $x = 6$ olduğunu gösteriniz.
b) Rasyonel sayılarda $\frac{5}{2}$ sayısının 3 katını, -3 katını ve küpünü bulunuz.
- 4) a) En az biri sonlu olan iki kümenin arakesiti sonlu olur mu? Gösteriniz.
b) $S = \{1, 2, 5, 10, 17, 26, \dots\}$ kümesinin sayılabilir olup olmadığını sayılabilirlik tanımını kullanarak gösteriniz.

NOT: Sınav süresi 90 dakikadır.

CEVAPLAR

BAŞARILAR

1) Ders dökümanlarına bakınız.

2) a) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m|a-b \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ni a-b=mk$
 $\Rightarrow a=mk+b, k \in \mathbb{Z}$

$c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow m|c-d \Rightarrow \exists t \in \mathbb{Z} \ni c-d=mt$
 $\Rightarrow c=mt+d, t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
 ac &= (b+mk)(d+mt) \\
 &= bd + bmt + mkd + mkm t \\
 &= bd + m(bt + kd + km t)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m | ac - bd \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$$

b)

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv y \pmod{m} \\ z | m \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} z | x - y \\ \Rightarrow x \equiv y \pmod{z} \end{array}$$

Gesetze 87.

3) a)

$$x = [a, b] \quad 3 = [3, 0] \quad 11 = [11, 0], \quad 7 = [7, 0]$$

$$3x - 11 = 7 \Rightarrow 3x + (-11) = 7$$

$$\Rightarrow [3, 0] [a, b] + [0, 11] = [7, 0]$$

$$\Rightarrow [3a, 3b] + [0, 11] = [7, 0]$$

$$\Rightarrow [3a, 3b+11] = [7, 0]$$

$$\Rightarrow (3a, 3b+11) \sim (7, 0)$$

$$\Rightarrow 3a = (3b+11) + 7 \Rightarrow 3a = 3b+18$$

$$\Rightarrow 3a = 3(b+6) \Rightarrow a = b+6$$

$$\Rightarrow x = [a, b] = [b+6, b] = [6, 0] = 6$$

b)

$$\frac{5}{2} = [(5, 2)]$$

$$\begin{aligned}
 3 \cdot [(5, 2)] &= [(5, 2)] + [(5, 2)] + [(5, 2)] \\
 &= [(5 \cdot 2 + 2 \cdot 5, 2 \cdot 2)] + [(5, 2)]
 \end{aligned}$$

$$= [(20, 4)] + [(5, 2)]$$

$$= [(20 \cdot 2 + 4 \cdot 5, 4 \cdot 2)] = [(60, 8)] = [(15, 2)]$$

$$-3 \cdot \{(5, 2)\} = 3 \{(-5, 2)\} \\ = \{(-60, 8)\} = \{(-15, 2)\}$$

$$\{(5, 2)\}^3 = \{(5, 2)\} \{(5, 2)\} \{(5, 2)\} \\ = \{(5 \cdot 5, 2 \cdot 2)\} \{(5, 2)\} = \{(25, 4)\} \{(5, 2)\} \\ = \{(25 \cdot 5, 4 \cdot 2)\} = \{(125, 8)\}$$

4) a) X, Y iki küme ve X sonlu olsun.
 $X \cap Y \subseteq X$ olup sonlu kümelerin alt kümesi de sonlu olduğundan $X \cap Y$ sonludur.

$$b) S = \{1, 2, 5, 10, 17, 26, \dots\} \\ = \{n^2 + 1 : n \in \mathbb{N}\}$$

$$f: S \longrightarrow A \subseteq \mathbb{N} \\ n^2 + 1 \longmapsto n$$

olarak şekilde tanımlanan f 1-1 ve örten olduğundan S sayılabilir.